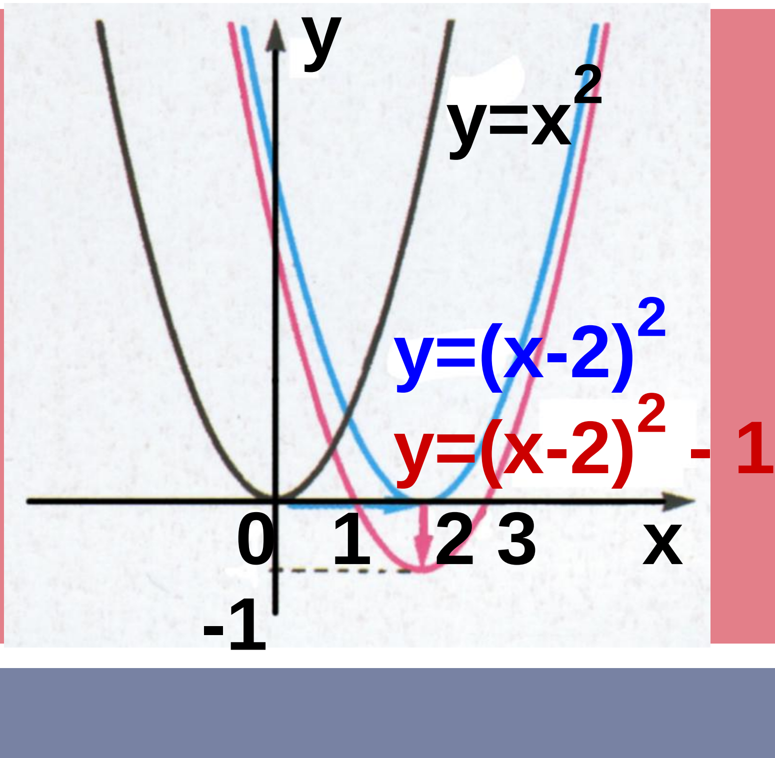
Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Τόμος 2ος

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 2ος

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Κατσαργύρης Βασίλειος
Παπασταυρίδης Σταύρος
Πολύζος Γεώργιος
Σβέρκος Ανδρέας

ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος
Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.
Σβέρκος Ανδρέας
Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π.Ι.

Σκούρας Αθανάσιος

Σύμβουλος του Π.Ι.

Πολύζος Γεώργιος

Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

Ελευθερόπουλος Ιωάννης

Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.

Ζώτος Ιωάννης *Καθηγητής Μαθ/κών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.*

Καλλιπολίτου Ευρυδίκη *Καθηγήτρια Μαθ/κών, Αποσπασμένη στο Π.Ι.*

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ
ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 2ος

2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η Εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ για συγκεκριμένους αριθμούς α, β, με $\alpha \neq 0$
Γενικότερα τώρα, θα δούμε πώς με την βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων, επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι αριθμοί α, β .
Έχουμε λοιπόν

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta = -\beta$$
$$\Leftrightarrow \alpha x = -\beta$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- **Αν $\alpha \neq 0$ τότε:**

$$\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\alpha}{\beta}$$

Επομένως, αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση, την $x = -\frac{\alpha}{\beta}$.

- **Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:**

i) αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι αδύνατη, ενώ
ii) αν είναι $\beta = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι ταυτότητα.
Η λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και ρίζα αυτής.
Για παράδειγμα
✓ Για την εξίσωση $4(x - 5) = x - 5$ έχουμε:

$$4(x - 5) = x - 5 \Leftrightarrow 4x - 20 = x - 5$$
$$\Leftrightarrow 4x - x = 20 - 5$$
$$\Leftrightarrow 3x = 15$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{3} = 5.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 5$.

✓ Για την εξίσωση $3x - x - 3 = 2x$
Έχουμε
$3x - x - 3 = 2x \Leftrightarrow 3x - x - 2x = 3 \Leftrightarrow 0x = 3$ που είναι αδύνατη.

✓ Για τη εξίσωση
$4(x - 5) - x = 3x - 20$ έχουμε
$4x - 20 - x = 3x - 20 \Leftrightarrow 4x - x - 3x =$
$= 20 - 20 \Leftrightarrow 0x = 0$ που είναι ταυτότητα.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής $αx + β = 0$, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές α

και β της εξίσωσης $αx + β = 0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση.**

Για παράδειγμα η εξίσωση

$(λ^2 - 1)x - λ + 1 = 0, λ \in R$

έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα

$$(λ^2 - 1)x - λ + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (λ^2 - 1)x = λ - 1$$
$$\Leftrightarrow (λ + 1)(λ - 1)x = λ - 1$$

Επομένως

✓ Αν $λ \neq -1$ και $λ \neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

✓ Αν $\lambda = -1$, η εξίσωση γίνεται $0x = -2$ και είναι αδύνατη.
✓ Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ποδηλάτης πήγε από μια πόλη Α σε μία πόλη Β και επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο. Στην μετάβαση οδηγούσε με μέση ταχύτητα 25km/h και ξεκουράστηκε ενδιάμεσα 1 ώρα. Στην επιστροφή οδηγούσε με μέση ταχύτητα 20 km/h και δεν έκανε καμία στάση. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες, να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ.

ΛΥΣΗ

Αν x km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης χρειάστηκε $\frac{x}{25}$ ώρες για να πάει από το Α στο Β και $\frac{x}{20}$ ώρες για να επιστρέψει, Αφού ξεκουράστηκε και 1 ώρα , ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1$

Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10$$

$$\Leftrightarrow 4x+5x+100=1000$$

$$\Leftrightarrow 9x=900$$

$$\Leftrightarrow x=100$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Στην συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν εξισώσεις 1ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\frac{x^2}{x-1} - (x-1) = (x-1)\frac{1}{x-1}$$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1$
$\Leftrightarrow$ x2 - x = 0
$\Leftrightarrow x(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$, αφού $x \neq 1$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση
$|2x -1| = |x + 3|$

ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:
$|2x -1| = |x + 3|$
$\Leftrightarrow 2x - 1 = x + 3$ ή $2x -1 = -(x + 3)$

Όμως:

✓ $2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 4 \Leftrightarrow x = 4$

✓ $2x - 1 = -(x + 3) \Leftrightarrow 2x + x = -3 + 1$

$\Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και $-\frac{2}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθεί η εξίσωση

$|2x - 3| = 3x - 2$

ΛΥΣΗ

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x - 2 > 0 \qquad (1)$$

Με αυτόν τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$|2x - 3| = 3x - 2$

$\Leftrightarrow 2x - 3 = 3x - 2$ ή $2x - 3 = 2 - 3x$

$\Leftrightarrow 2x - 3x = -2 + 3$ ή $2x + 3x = 2 + 3$

$\Leftrightarrow -x = 1$ ή $5x = 5$

$\Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$, διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

ΣΧΟΛΙΟ

Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$

ii) $\dfrac{1 - 4x}{5} - \dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{x - 4}{20} + \dfrac{5}{4}$

iii) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{5} - \dfrac{49}{60}$

iv) $1,2(x + 1) - 2,5 + 1,5x = 8,6$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4$

ii) $2x - \dfrac{5 - x}{3} = -\dfrac{5}{3} + \dfrac{7x}{3}$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in R$

i) $(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

ii) $(\lambda - 2)x = \lambda$

iii) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

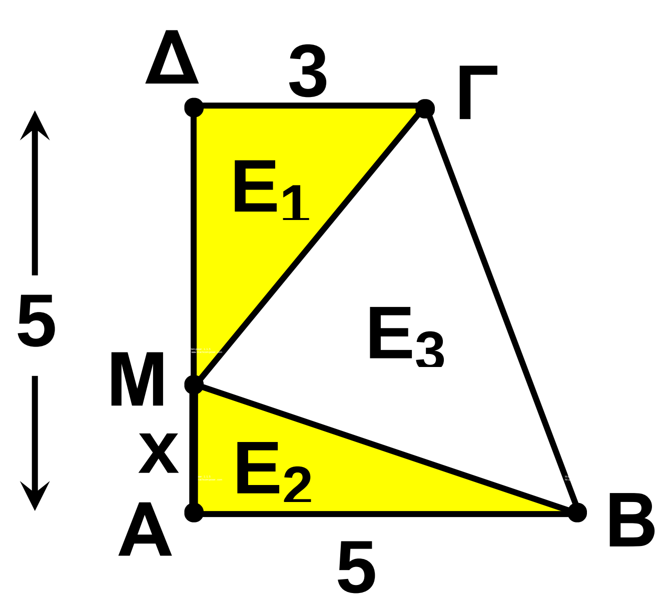
iv) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda$

4. Στο παρακάτω ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου Μ στην ΑΔ ώστε για τα εμβαδά

$E_1 = (\overset{\triangle}{ΜΔΓ})$, $E_2 = (\overset{\triangle}{ΜΑΒ})$ και

$E_3 = (\overset{\triangle}{ΜΒΓ})$ να ισχύει:

i) $E_1 + E_2 = E_3$ ii) $E_1 = E_2$



5. **Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε σε μια τράπεζα προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175€ τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;**

6. **Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή:**

i) $v = v_0 + \alpha t$, $\alpha \neq 0$ (ως προς το t)

ii) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (ως προς το R_1).

7. **Να λύσετε τις εξισώσεις**

i) $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0$.

ii) $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0$.

8. **Να λύσετε τις εξισώσεις**

i) $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$

ii) $(x + 1) + x^2 - 1 = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$

ii) $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$.

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

ii) $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0$.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{1}{x^2 - x}$

ii) $\dfrac{x + 1}{x^2 - 1} + \dfrac{2}{x^2 - 2x + 1} = 0$.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

ii) $\dfrac{3}{x + 2} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x - 4}{x^2 + 2x}$

iii) $\dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

iv) $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \dfrac{x}{x + 1}$

13. **Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμα τους να ισούται με το γινόμενο τους.**

14. **Να λύσετε τις εξισώσεις**

i) $|2x - 3| = 5$

ii) $|2x - 4| = |x - 1|$

iii) $|x - 2| = 2x - 1$

iv) $|2x - 1| = x - 2$.

15. **Να λύσετε τις εξισώσεις**

i) $\dfrac{|x| + 4}{3} - \dfrac{|x| + 4}{5} = \dfrac{2}{3}$

ii) $\dfrac{2|x| + 1}{3} - \dfrac{|x| - 1}{2} = \dfrac{1}{2}$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\left|\frac{3 - x}{3 + x}\right| = 4$

ii) $|x - 1|\,|x - 2| = |x - 1|$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

i) $(x + \alpha)^2 - (x - \beta)^2 = 2\alpha(\alpha + \beta)$

ii) $\frac{x - \alpha}{\beta} = \frac{x - \beta}{\alpha}$

έχουν πάντα λύση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

2. Ποιοί περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα α, $\beta \in R$, ώστε να έχει λύση η εξίσωση $\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1$;

3. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οινοπνεύματος

περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 32%;

4. **Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με 100km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120km/h προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1km;**

5. **Να λύσετε την εξίσωση**

$$\frac{x+\alpha}{x-\alpha}=\frac{x^2}{x^2-\alpha^2}$$ **για όλες τις τιμές του** $\alpha \in R$ **.**

6. **Να λύσετε την εξίσωση**

$$\frac{x^3-8}{x-2}=x^2+4$$

7. **Να λύσετε την εξίσωση**

$$|2|x|-1|=3$$

8. **Να λύσετε την εξίσωση**

$$\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5|$$

2.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$

• Έστω η εξίσωση $x^3 = 8$. Όπως αναφέραμε στον ορισμό της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[3]{8} = 2$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί, για κάθε $x \le 0$ ισχύει $x^3 \le 0$. Επομένως η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[3]{8}$. Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με **$\alpha > 0$** και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = 16$. Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση την $\sqrt[4]{16} = 2$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει

ως λύση και την $-\sqrt[4]{16} = -2$, αφού $(-\sqrt[4]{16})^4 = (\sqrt[4]{16})^4 = 16$. Επομένως η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, την $\sqrt[4]{16} = 2$ και την $-\sqrt[4]{16} = -2$

Γενικότερα:

> **Η εξίσωση $x^ν = α$, με $α > 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις την $\sqrt[ν]{α}$ και $-\sqrt[ν]{α}$.**

- **Έστω η εξίσωση $x^3 = -8$ Έχουμε διαδοχικά:**

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow -x^3 = 8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8$$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[3]{8} = -2$

Γενικότερα:

> **Η εξίσωση $x^ν = α$, με $α < 0$ και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει**

ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

• Έστω η εξίσωση $x^4 = -4$. Επειδή για κάθε x ισχύει $x^4 \geq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.
Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\alpha < 0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}$, έχει προφανή λύση την $x = \alpha$, προκύπτει ότι:

• Αν ο ν <u>περιττός</u> τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει μοναδική λύση, την $x = \alpha$

• Αν ο ν <u>άρτιος</u> τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 8x = 0$

ΛΥΣΗ

$x^4 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x3 + 8) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x3 = -8$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -\sqrt[3]{8} = -2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 125 = 0$ ii) $x^5 - 243 = 0$

iii) $x^7 - 1 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 + 125$ ii) $x^5 + 243 = 0$

iii) $x^7 + 1 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 64$ ii) $x^4 - 81 = 0$

iii) $x^6 - 64 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^5 - 8x^2 = 0$ **ii)** $x^4 + x = 0$

iii) $x^5 + 16x = 0$

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $81m^3$ και διαστάσεις x, x και 3x. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x + 1)^3 = 64$ **ii)** $1 + 125x^3 = 0$

iii) $(x - 1)^4 - 27(x - 1) = 0$

2.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0 \qquad (1)$$

η οποία λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού.**

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος

$S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, όπου S το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο t, με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση γ. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο t, τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t - S = 0,$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.
Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της «συμπλήρωσης του τετραγώνου».
Έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \quad [\text{αφού } \alpha \neq 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- **Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:**

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ .$$

- **Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:**

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

- **Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι αδύνατη στο R.**

Η αλγεβρική παράσταση
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ονομάζεται διακρίνουσα αυτής.
Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο R .

Για παράδειγμα

✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 > 0$, οπότε έχει
δυο ρίζες τις $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 1$ και

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

✓ Η εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, οπότε έχει μια
διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$.
Η παραπάνω εξίσωση λύνεται
σύντομα ως εξής:
$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
(διπλή ρίζα).
✓ Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 4 = 0$ έχει
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$, οπότε
δεν έχει πραγματικές ρίζες.
Στην περίπτωση που η εξίσωση
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει
πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

και

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$$

$$= \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$\boxed{S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι Vieta.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.
Για παράδειγμα η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 4\sqrt{3} = 0$$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = 4(\sqrt{3} + 1)^2 - 4 \cdot 4\sqrt{3} =$$

$$= 4\left[(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1\right] = 4(\sqrt{3} - 1)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δυο ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{4(\sqrt{3} - 1)^2}}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 2 \pm 2(\sqrt{3} - 1)}{2} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{cases}$$

2η Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος

300m. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή, που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος
i) πέσει από την κορυφή;
ii) εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec; Δίδεται ότι $g \simeq 10$ m/sec^2.

ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από την Φυσική ότι το διάστημα S που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο t sec είναι: $S = \frac{1}{2}gt^2$

Επειδή S = 300m και $g \simeq 10 \frac{m}{sec^2}$ έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 = 300 \Leftrightarrow 5t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 60$$

$$\Leftrightarrow t = \pm\sqrt{60} \Leftrightarrow t \simeq \pm 7{,}75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα $t \simeq 7{,}75 sec$.

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0, το διάστημα που διανύει σε χρόνο t sec είναι:

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

Επειδή $v_0 = 50\,\frac{m}{sec}$ και $t > 0$ θα έχουμε :

$$\frac{1}{2}10t^2 + 50t = 300$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 50t - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10 + \sqrt{100 + 4 \bullet 60}}{2}$$

$$\simeq \frac{-10 + 18{,}43}{2} = 4{,}22 \text{ sec.}$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου 4,22sec.

ΣΧΟΛΙΟ
Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όπως είδαμε και παραπάνω, δεν πρέπει να ξεχνάμε να ελέγχουμε, αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι εύλογες.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Να λυθεί η εξίσωση
$x^2 - 2|x| - 3 = 0$.

ΛΥΣΗ

Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται:
$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$
Αν θέσουμε $|x| = ω$, τότε η εξίσωση γίνεται
$ω^2 - 2ω - 3 = 0$.
Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $ω_1 = 3$ και $ω_2 = -1$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $ω = |x| \geq 0$.
Επομένως $|x| = 3$, που σημαίνει
$x = -3$ ή $x = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x - 1}{x - 1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x} .$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x - 1 \neq 0$ και $x^2 - x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε:

$$\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x}\ .$$

$$\Leftrightarrow\ x(x-1)\frac{3x-1}{x-1} - x(x-1)\frac{2}{x} =$$

$$= x(x-1)\frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow\ x(3x-1) - (x-1)2 = 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_2 = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο:

Να λυθεί η εξίσωση:

$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$ (1)

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται:
$2y^2 - 7y - 4 = 0$ (2)

Η εξίσωση $2y^2 - 7y - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$ Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$. Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 4$, δηλαδή οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα εφαρμόζεται και για την επίλυση κάθε εξίσωσης της μορφής:

$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$
Οι εξισώσεις της μορφής αυτής ονομάζονται διτετράγωνες εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
ii) $x^2 - 6x + 9 = 0$
iii) $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - 1{,}69 = 0$
ii) $0{,}5x^2 - x = 0$
iii) $3x^2 + 27 = 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:

i) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$, $\lambda \neq 0$
ii) $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$

4. **Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0$, $\mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.**

5. **Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο R η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha = \beta$.**

6. **Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς**

i) 2 και 3 **ii)** 1 και $\frac{1}{2}$

iii) $5 - 2\sqrt{6}$ και $5 + 2\sqrt{6}$.

7. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15 .

ii) άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

8. **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

i) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$

ii) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$.

9. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in R$.

10. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$

ii) $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

iii) $x^2 - 8|x| + 12 = 0$.

12. Να λύσετε την εξίσωση $(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0$.

13. Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0 .$$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{13}{6}$

ii) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{2x-3}{x-2} + \dfrac{2-x^2}{x^2-2x} = 0$.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$

ii) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

iii) $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η εξίσωση

$\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x + \alpha^4 - 1 = 0$, με $\alpha \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 4\alpha^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}$ και $\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha}$.

2. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0 .$$

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2$

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2 - \sqrt{2}$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

4. Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x}$, $\alpha \neq 0$

ii) $\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha, \beta \neq 0$

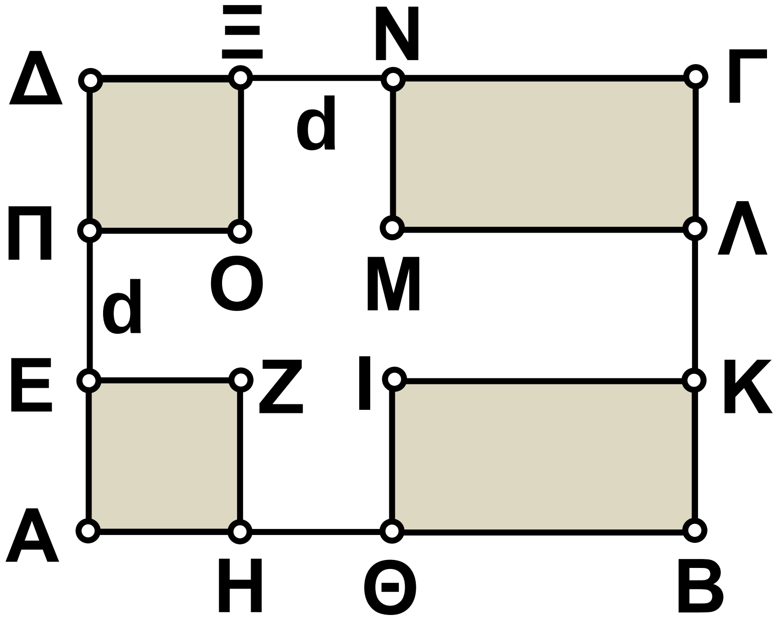
6. **Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2λx - 8 = 0$**

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $λ \in R$.

ii) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

7. **Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.**

8. **Η σημαία του παρακάτω σχήματος έχει διαστάσεις 4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.**



9. **Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δυο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δυο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.**

10. Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 10x^2 + α = 0$ είναι ο αριθμός 1. Να βρείτε το α και να λύσετε την εξίσωση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	Η εξίσωση $(α - 1)x = α(α - 1)$ έχει μοναδική λύση την $x = α$.	Α	Ψ
2.	Η εξίσωση $(\|x\| + 1)(\|x\| + 2) = 0$ είναι αδύνατη.	Α	Ψ

3.	Η εξίσωση (|x| - 1)(|x| - 2|) = 0 έχει δύο πραγματικές ρίζες	Α	Ψ
4.	Η εξίσωση (|x| - 1)(|x| + 2|) = 0 έχει δύο πραγματικές ρίζες	Α	Ψ
5.	Η εξίσωση |x| = x - 2 έχει μοναδική λύση.	Α	Ψ
6.	Η εξίσωση |x| = 2 - x έχει μοναδική λύση.	Α	Ψ
7.	Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.	Α	Ψ
8.	Αν δύο εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x των εξισώσεων αυτών είναι ίσοι.	Α	Ψ
9.	Η εξίσωση $αx^2 + 2x - α = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.	Α	Ψ

10.	**Η εξίσωση $x^2 - 4αx + 4α^2 = 0$, με $α \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.**	**Α**	**Ψ**
11.	**Η εξίσωση $α^2x^2 - 2αx + 2 = 0$, με $α \neq 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες.**	**Α**	**Ψ**
12.	**Η εξίσωση $2x^2 + 3αx + α^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.**	**Α**	**Ψ**
13.	**Η εξίσωση $x^2 - \left(α + \frac{1}{α}\right)x + 1 = 0$, με $α \neq 0,1$ έχει δύο άνισες και αντίστροφες πραγματικές ρίζες.**	**Α**	**Ψ**
14.	**Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.**	**Α**	**Ψ**

15.	Οι εξισώσεις $\dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
16.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S = -10 και γινόμενο P = 16 .	Α	Ψ
17.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S = 10 και γινόμενο P = 25 .	Α	Ψ
18.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S = 2 και γινόμενο P = 2 .	Α	Ψ

ΙΙ. Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση $(2x - 1)(x + 2) =$ $= (3 - 2x)(x + 2)$ γράφεται ισοδύναμα:
   $(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2)$
   $\Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$
   Όμως και ο αριθμός $x = -2$ <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα εξίσωση.
2. Η εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$ γράφεται ισοδύναμα:
   $|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2$ ή
   $2x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1.$

Όμως καμία από τις τιμές αυτές του x <u>δεν επαληθεύει</u> τη δοθείσα εξίσωση.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Από τα αρχαία χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν διάφορες τεχνικές για να λύσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού.

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους, ίσως λόγω των δυσκολιών που είχαν με τους άρρητους αριθμούς, αλλά και λόγω πρακτικών δυσκολιών που προέκυπταν από τα ελληνικά ψηφία.
Οι Ινδοί και οι Άραβες χρησιμοποίησαν μια μέθοδο όμοια με τη σημερινή διαδικασία «συμπλήρωσης τετραγώνου», περιγράφοντας όμως λεκτικά τον τρόπο εύρεσης των λύσεων. Αυτοί θεωρούσαν ως διαφορετικού τύπου κάθε μία από τις εξισώσεις

$x^2 + px = q$, $x^2 - px = q$, $x^2 - px = -q$.

Σήμερα όμως γράφουμε τις εξισώσεις αυτές με τη γενική μορφή $αx^2 + βx + γ = 0$

Ο σύγχρονος συμβολισμός άρχισε να εμφανίζεται περί το 1500 μ.Χ, και

οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τούς Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης.
Όμως η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια μας ενέπνευσε να αναπτύξουμε μερικούς τρόπους εξαγωγής του τύπου

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

που δίνει τις ρίζες της γενικής εξίσωσης 2ου βαθμού
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ **.**

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις μεθόδους επίλυσης μίας εξίσωσης 2ου βαθμού.

Μέθοδος των Ινδών

Η επίλυση αυτή που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ. Χ. περίπου). Έχουμε διαδοχικά:

$$αx^2 + βx + γ = 0$$

$$αx^2 + βx = -γ$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το $β^2$ και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος. Δηλαδή

$$4α^2x^2 + 4αβx = -4αγ$$

$$4α^2 x^2 + 4αβx + β^2 = β^2 - 4αγ$$

$$(2αx + β)^2 = β^2 - 4αγ$$

$$2αx + β = \pm\sqrt{β^2 - 4αγ},$$

εφόσον $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

Έτσι προκύπτει ότι:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Σχόλιο: **Η απλότητα της μεθόδου των Ινδών χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται. παρά μόνο στο τελευταίο βήμα.**

Μέθοδος του Vieta

Η εξίσωση 2ου βαθμού $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο βx, πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} \qquad (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\alpha\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = 0$$

η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:

$$\alpha y^2 + \frac{-\beta + 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0 \quad .$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι

$$y = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{εφόσον } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$$

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του y στην (1) και έχουμε:

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$$

Οπότε $$x = \frac{-\beta \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad .$$

<u>Σχόλιο:</u> **Η μέθοδος αυτή του Vieta είναι ενδιαφέρουσα, γιατί είναι ο προάγγελος της τεχνικής για την επίλυση της γενικής τριτοβάθμιας καθώς και της διτετράγωνης εξίσωσης. Για παράδειγμα, το πρώτο βήμα στην επίλυση της εξίσωσης $αx^3 + βx^2 + γx + δ = 0$, είναι η αντικατάσταση $x = y - \frac{β}{3α}$ που απαλλάσσει την εξίσωση από το δευτεροβάθμιο όρο.**

<u>Μέθοδος του Harriot</u>

Ο μαθηματικός Thomas Harriot (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπου:

Υποθέτουμε ότι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (1).
Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2 . Αυτή είναι η
$(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ή ,ισοδύναμα, η
$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ (2)
Με διαίρεση των μελών της (1) με $\alpha \neq 0$, βρίσκουμε:

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1x_2 = -\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (4)$$

Η ταυτότητα
$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ σε συνδυασμό με την (4) δίνει

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha},$$

$[\text{εφόσον } \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0]$ (5)

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

και

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Σχόλιο: Είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα της (5). Η αρνητική ρίζα απλώς εναλλάσσει τη διάταξη των x_1 και x_2 .

3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις: $αx + β > 0$ και $αx + β < 0$

Γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο τη διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης της μορφής $αx + β > 0$ ή της μορφής $αx + β < 0$, με α και β συγκεκριμένους αριθμούς.
Γενικότερα έχουμε:

$$αx + β > 0 \Leftrightarrow αx + β - β > -β \Leftrightarrow αx > -β$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- **Αν $α > 0$, τότε:**

$$αx > -β \Leftrightarrow \frac{αx}{α} > \frac{-β}{α}$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{-β}{α}$$

• Αν α < 0, τότε:

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{-\beta}{\alpha}$$

• Αν α = 0, τότε η ανίσωση γίνεται 0x > -β, η οποία

✓ αληθεύει για κάθε $x \in R$, αν είναι β > 0, ενώ

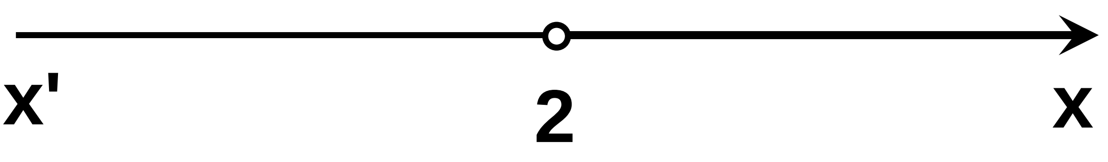
✓ είναι αδύνατη, αν είναι β < 0 .

Για παράδειγμα:

• Η ανίσωση 4x > 8 γράφεται:

$$4x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{4} \Leftrightarrow x > 2\ .$$

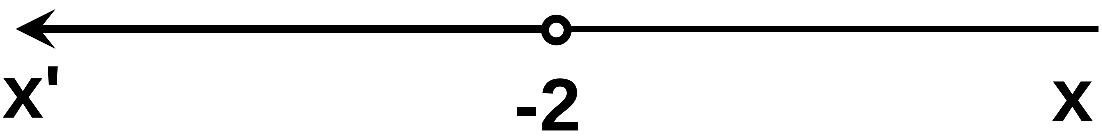
Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (2, +\infty)$



• Η ανίσωση -4x > 8 γράφεται:

$$-4x > 8 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{4} \Leftrightarrow x < -2 \quad .$$

Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-\infty,-2)$.



• Η ανίσωση $0x > -2$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, ενώ η ανίσωση $0x > 2$ είναι αδύνατη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

i) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$2(x + 4) - (x + 6) < 12 - x \quad \text{και}$$

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1 + x)$$

ii) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

ΛΥΣΗ

i) Για την πρώτη ανίσωση έχουμε:

$$2(x + 4) - (x + 6) < 12 - x$$
$$\Leftrightarrow 2x + 8 - x - 6 < 12 - x$$
$$\Leftrightarrow 2x - x + x < 12 + 6 - 8$$
$$\Leftrightarrow 2x < 10$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$$
$$\Leftrightarrow x < 5 .$$

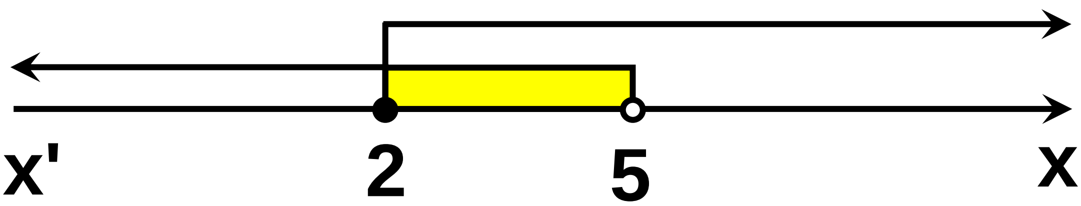
Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x < 5$.

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε:

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1 + x)$$
$$\Leftrightarrow 12x + x + 10 \geq 12(1 + x)$$
$$\Leftrightarrow 12x + x + 10 \geq 12 + 12x$$
$$\Leftrightarrow x \geq 2.$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 2$

ii) Επειδή η πρώτη ανίσωση αληθεύει για $x < 5$ και η δεύτερη για $x \geq 2$, οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x με $2 \leq x \leq 5$, δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in [2,5)$.
Για τον προσδιορισμό των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων μας διευκολύνει να παραστήσουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα (Σχήμα), απ’ όπου προκύπτει ότι $2 \leq x \leq 5$



Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής και της έννοιας της απόστασης δύο αριθμών, μπορούμε να επιλύουμε ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα επίλυσης τέτοιων ανισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η ανίσωση: $|x - 2| < 3$.

ΛΥΣΗ

Η επίλυση της ανίσωσης $|x - 2| < 3$, με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

γίνεται ως εξής:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow 2 - 3 < x < 2 + 3$$
$$-1 < x < 5$$

Μπορούμε όμως να λύσουμε την παραπάνω ανίσωση και με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

ως εξής:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3$$
$$\Leftrightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 5 .$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-1,5)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση: $|2x - 1| > 5$

ΛΥΣΗ

Από την ιδιότητα
$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$ έχουμε :

$$|2x - 1| > 5 \Leftrightarrow 2x - 1 < -5 \text{ ή } 2x - 1 > 5$$
$$\Leftrightarrow 2x < -4 \text{ ή } 2x > 6$$
$$\Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 3$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2x+3}{4} < \dfrac{x}{6}$

ii) $\dfrac{x - 12}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} > x$

iii) $\dfrac{x - 2}{2} + \dfrac{1 - 2x}{5} < \dfrac{x}{10} - \dfrac{2}{5}$

2. **Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις**

$3x - 1 < x + 5$ **και** $2 - \dfrac{x}{2} \leq x + \dfrac{1}{2}$.

3. **Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις:**

$x - \dfrac{1}{2} > \dfrac{x}{2} + 1$ **και** $x - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x}{3} - 1$.

4. **Να βρείτε τα** $x \in Z$ **για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις:**

$2x - \dfrac{x - 1}{8} > x$ **και** $x - 4 + \dfrac{x + 1}{2} < 0$.

5. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $|x| < 3$ ii) $|x - 1| \leq 4$

iii) $|2x + 1| < 5$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x| \geq 3$ ii) $|x - 1| > 4$

iii) $|2x + 1| \geq 5$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|2x - 6| = 2x - 6$

ii) $|3x - 1| = 1 - 3x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $$\frac{|x - 1| - 4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x - 1|}{3}$$

ii) $$\frac{|x| + 1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1 - |x|}{3}.$$

9. Να λύσετε την ανίσωση

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5$$

10. Να βρείτε την ανίσωση της μορφής $|x - x_0| < \rho$, που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος $(-7,3)$.

11. Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου (^oC) με τους βαθμούς Φαρενάϊτ (^oF) είναι η $F = \frac{9}{5}C + 32$. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 41^{o}F μέχρι 50^{o}F. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^{o}C.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $3 \le 4x - 1 \le 6$ **ii)** $-4 \le 2 - 3x \le -2$.

2. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $2 \le |x| \le 4$ **ii)** $2 \le |x - 5| \le 4$.

3. Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους

αριθμούς -3 και 5 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.
i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;
ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης
$|x - 5| \leq |x + 3|$ και να βρείτε τις λύσεις της.
iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

4. Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.
i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;
ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης
$|x - 1| + |x - 7| = 6$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων x - 1 και x - 7 .

3.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Η παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha = 0$ λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο.** Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, δηλαδή

οι $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου.**

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

$$= \alpha\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right]$$

$$= \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right] .$$

Επομένως:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- **$\Delta > 0$. Τότε ισχύει $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, οπότε έχουμε:**

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$$

$$= \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$

$$= \alpha\left[x - \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right].$$

Επομένως:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$,

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν Δ > 0, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

• $\Delta = 0$. Τότε από την ισότητα (1) έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Άρα, όταν Δ = 0, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

• $\Delta < 0$. Τότε ισχύει |Δ| = -Δ, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Επειδή για κάθε $x \in R$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για τις μορφές του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα Δ έχουμε:

- **Αν $\Delta > 0$,τότε:**
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$,
όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.
- **Αν $\Delta = 0$, τότε:**

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- **Αν $\Delta < 0$, τότε:**

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Για παράδειγμα:

✓ Το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 2$ έχει

$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}$

και $x_2 = -2$. Επομένως:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) =$$

$$= (2x - 1)(x + 2) \ .$$

✓ Το τριώνυμο $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$

έχει $\Delta = 9 - 4 \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{9}{2} = 0$

και $\frac{\beta}{2\alpha} = -3$. επομένως:

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)^2 \ .$$

✓ Το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 5$ έχει $\Delta = -4 < 0$. Επομένως:

$$2x^2 - 6x + 5 = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right].$$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

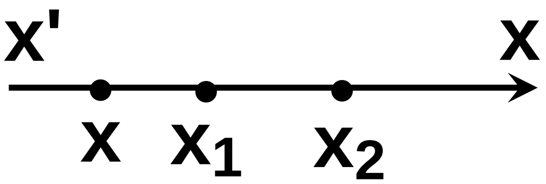
Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

• Αν $Δ > 0$, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

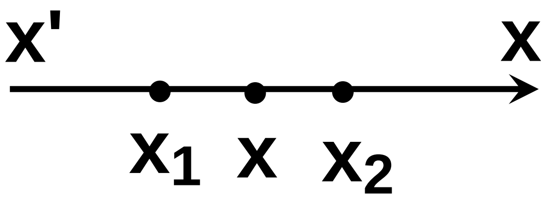
$$αx^2 + βx + γ = α(x - x_1)(x - x_2) \quad (1).$$

Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

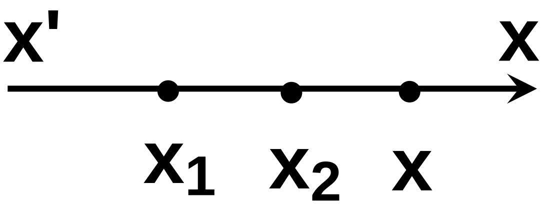
✓ Αν $x < x_1 < x_2$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 < 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α.



✓ Αν $x_1 < x < x_2$ (Σχήμα), τότε
$x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε
$(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α .



✓ Αν $x_1 < x_2 < x$ (Σχήμα), τότε
$x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$, οπότε
$(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α .



• Αν $\Delta = 0$, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 .$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι

ομόσημο του α για κάθε πραγματικό $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

• Αν **Δ < 0**, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το R.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται:
• **Ετερόσημο** του α , μόνο όταν είναι Δ > 0 και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.

• **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
• **Ομόσημο** του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ανισώσεις της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$, $\alpha \neq 0$, τις οποίες ονομάζουμε **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**. Ο τρόπος επίλυσης αυτών φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο
Να λυθούν οι ανισώσεις
i) $2x^2 - 3x - 2 > 0$
ii) $2x^2 - 3x - 2 < 0$

ΛΥΣΗ

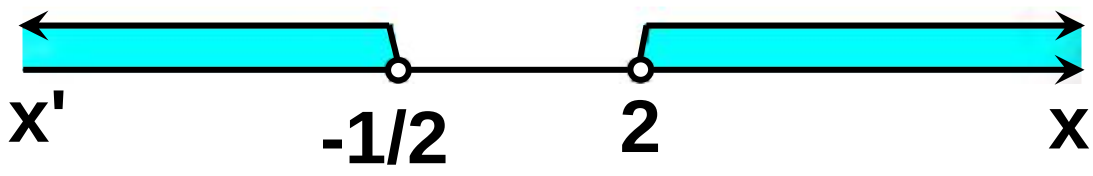
Ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$ είναι θετικό στην περίπτωση (i) και αρνητικό στην περίπτωση (ii).
Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 2 και, επειδή $\alpha = 2 > 0$, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f(x)		+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:
i) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 > 0$ έχει λύσεις τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει

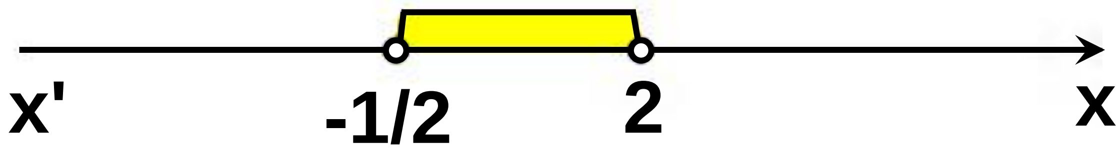
$x < -\frac{1}{2}$ ή $x > 2$, δηλαδή τα

$x \in \left(-\infty\ , -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 < 0$ έχει λύσεις τα $x \in R$ για τα οποία ισχύει $-\frac{1}{2} < x < 2$, δηλαδή τα $x \in \left(-\frac{1}{2}\ , 2\right)$.

Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



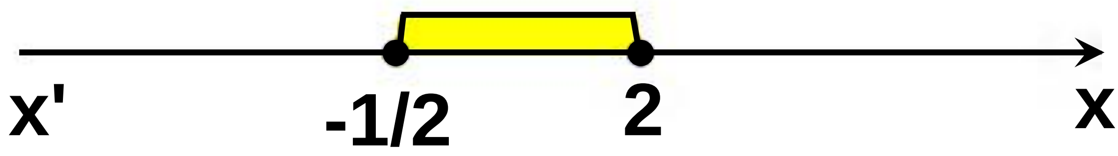
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του x, που είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ή ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Επομένως σύμφωνα με το 1ο παράδειγμα οι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ είναι τα $x \in R$, με $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, δηλαδή τα

$x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

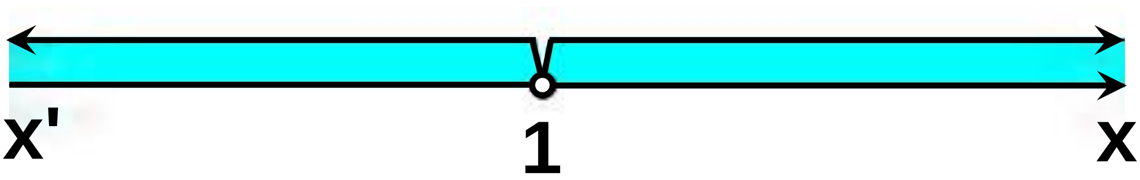
Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $x^2 - 2x + 1 > 0$

ii) $x^2 - 2x + 1 < 0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 1$ είναι $Δ = 0$, οπότε έχει διπλή ρίζα την $x = 1$. Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $α = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in R$ με $x \neq 1$. Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης (i) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x, με $x \neq 1$, ενώ η ανίσωση (ii) είναι αδύνατη.
Οι λύσεις της (i) εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 + x + 1 > 0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + x + 1$ είναι $Δ = -3 < 0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $α = 1$,

δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in R$. Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

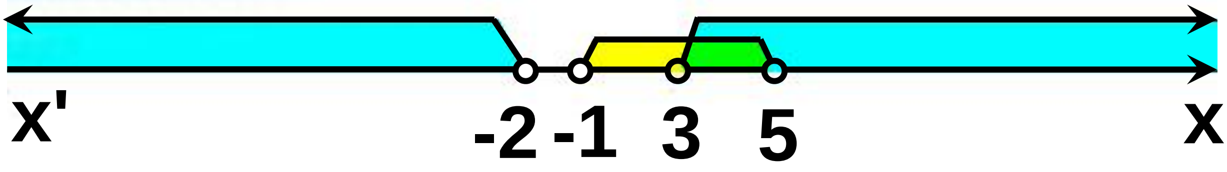
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να βρεθούν οι τιμές του $x \in R$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:
$x^2 - 4x - 5 < 0$ και $x^2 - x - 6 > 0$.

ΛΥΣΗ

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις
Έχουμε:

- ✓ $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) < 0$
  $\Leftrightarrow -1 < x < 5$
- ✓ $x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) > 0$
  $\Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 3$



Άρα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (3,5)$.

2η Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha + 4 = 0,\ \alpha \in R$$

i) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης και να μελετηθεί το πρόσημό της.

ii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες;

iii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;

iv) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση είναι αδύνατη στο R ;

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\Delta = [-(\alpha + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha + 4) =$$
$$= \alpha^2 - 2\alpha - 15.$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο του α με διακρίνουσα

$\Delta' = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0.$

Επομένως η διακρίνουσα Δ έχει ρίζες:

$$\alpha_1 = \frac{2 + 8}{2} = 5 \quad \text{και} \quad \alpha_2 = \frac{2 - 8}{2} = -3.$$

και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Δ		+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι:

ii) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν $\Delta > 0$, δηλαδή αν $\alpha < -3$ ή $\alpha > 5$.

iii) Η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν $\alpha = -3$ ή $\alpha = 5$.

iv) Η εξίσωση είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$, δηλαδή $-3 < \alpha < 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 3x + 2$ ii) $2x^2 - 3x - 2$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$ ii) $\dfrac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49}$

iii) $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3}$

3. Για τις διάφορες τιμές του χ e M, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 2x - 15$ ii) $4x^2 - 4x + 1$

iii) $x^2 - 4x + 13$.

4. **Για τις διάφορες τιμές του $x \in R$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:**

i) $-x^2 + 4x - 3$ **ii)** $-9x^2 + 6x - 1$

iii) $-x^2 + 2x - 2$.

5. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $5x^2 \leq 20x$ **ii)** $x^2 + 3x \leq 4$.

6. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $x^2 - x - 2 > 0$ **ii)** $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

7. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $x^2 + 4 > 4x$ **ii)** $x^2 + 9 \leq 6x$.

8. **Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $x^2 + 3x + 5 < 0$

ii) $2x^2 - 3x + 20 > 0$.

9. **Να λύσετε την ανίσωση**

$$-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0 .$$

10. Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες ισχύει: $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$.

11. Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $x^2 - 6x + 5 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις: $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2$ και $\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2$.

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$.

2. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta$.

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{x^2 - \alpha x + \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2}.$$

4. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + \lambda + 5 = 0$, $\lambda \in R$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:

i) έχει ρίζες ίσες

ii) έχει ρίζες άνισες

iii) είναι αδύνατη.

5. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3\lambda x + \lambda > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$.

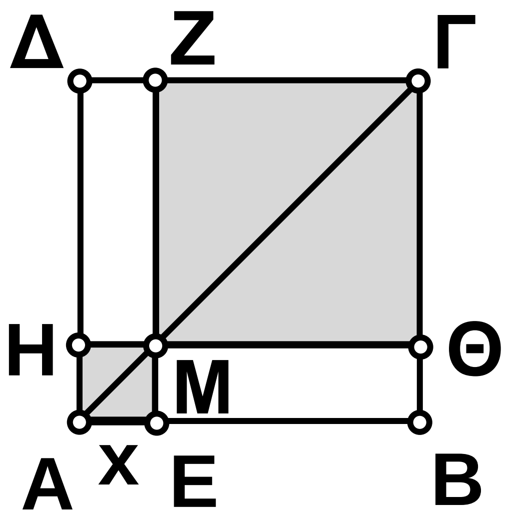
6. Δίνεται το τριώνυμο $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda$, $\lambda \neq -2$.

i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $\Delta < 0$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση

$(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0$, $\lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in R$.

7. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ . Να βρείτε τις θέσεις του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5.



8. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha, \beta \neq 0$.

ii) Να καθορίσετε το πρόσημο της

παράστασης $A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1$ για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \neq 0$.

3.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x)$, $B(x)$, … , $\Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμα). Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in R$ το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1)$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

- ✓ **Επειδή**

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

το $x - 1$ είναι θετικό για $x > 1$, μηδέν για $x = 1$ και αρνητικό για $x < 1$.

- ✓ **Επειδή**

$$x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 2,$$

το $x^2 + x - 6$ είναι θετικό για $x < -3$ και για $x > 2$, μηδέν για $x = -3$ και για $x = 2$ και αρνητικό για $-3 < x < 2$.

- ✓ **Επειδή το $2x^2 + x +1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x \in R$. Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου $P(x)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.**

x	$-\infty$ -3 1 2 $+\infty$
$x - 1$	- | - 0 + | +
$x^2 + x - 6$	+ 0 - | - 0 +
$2x^2 + x + 1$	+ | + | + | +
$P(x)$	- 0 + 0 - 0 +

Ώστε το γινόμενο P(x) είναι θετικό για $-3 < x < 1$ και για $x > 2$, ενώ είναι αρνητικό για $x < -3$ και για $1 < x < 2$. Τέλος είναι μηδέν για $x = -3$, για $x = 1$ και για $x = 2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0)

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0$ (< 0), όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1) < 0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες το γινόμενο

$$P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1)$$

είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του P(x) διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -3) \cup (1,2)$.

Ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ (<0)

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$$ και

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

αφού, καμία από τις λύσεις της
$A(x) \cdot B(x) > 0$ και της $A(x) \cdot B(x) < 0$
δεν μηδενίζει το $B(x)$.
Για παράδειγμα , έστω ότι θέλουμε
να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x - 1)(2x^2 + x + 1)}{x^2 + x - 6} > 0$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με
την
$(x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1) > 0$,
δηλαδή με την $P(x) > 0$, η οποία,
από τον πίνακα προσήμου του $P(x)$
αληθεύει όταν $x \in (-3,1) \cup (2, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ
Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$

αληθεύει για εκείνους τους
πραγματικούς αριθμούς x για τους
οποίους ισχύουν συγχρόνως
$A(x) \cdot B(x) > 0$ και $B(x) \neq 0$.

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση

$\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} \geq 0$. Έχουμε:

$\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4\ ) > 0$

και $x^2 + 3x - 4 \neq 0$.

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ είναι οι 1 και 3, ενώ του τριωνύμου $x^2 + 3x - 4$ είναι οι 1 και -4.

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

$P(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 3x - 4)$

x	-∞ -4 1 3 +∞
$x^2 - 4x + 3$	+ | + 0 - 0 +
$x^2 + 3x - 4$	+ 0 - 0 + | +
P(x)	+ | - | - | +

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν
$x \in (-\infty, -4) \cup [3, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)$.

2. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$P(x) = (-x^2 + 4)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1)$.

3. Να λύσετε την ανίσωση

$(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9) > 0$.

4. Να λύσετε την ανίσωση

$(3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3) \leq 0$.

5. Να λύσετε την ανίσωση

$(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0$.

6. Να λύσετε την ανίσωση

$$(x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0 .$$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x - 2}{x + 1} > 0$ ii) $\dfrac{2x + 1}{x - 3} \leq 0$.

8. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0 .$$

<u>**Β΄ ΟΜΑΔΑΣ**</u>

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{2x + 3}{x - 1} > 4$ ii) $\dfrac{x - 2}{3x + 5} \leq 4$.

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 1} + 2 \leq 0 .$$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x}{3x - 5} \leq \dfrac{2}{x - 1}$ ii) $\dfrac{x}{2x - 1} \geq \dfrac{3}{x + 2}$

4. Να λύσετε την ανίσωση

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| > 2 .$$

5. Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης των λαμπτήρων είναι x ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος Κ και τα αντίστοιχα έσοδα Ε (σε χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους $K = 7 - x$ και $E = 5x - x^2$. Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες η εταιρεία έχει κέρδος.

6. Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείται ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση σ ενός φαρμάκου, t ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται από τον τύπο

$$\sigma = \frac{20t}{t^2 + 4} \text{ mgr/lt}.$$

Αν για το συγκεκριμένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι 4 mgr /lt, να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο σ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η ανίσωση $-x^2 + 2x + \gamma > 0$ είναι αδύνατη τότε:

Α) $\gamma > -1$ Β) $\gamma = -1$

Γ) $\gamma < -1$ Δ) $\gamma \geq -1$.

2. Αν η ανίσωση $x^2 - 2x + \gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, τότε:

Α) $\gamma < 1$ Β) $\gamma = 1$

Γ) $\gamma > 1$ Δ) $\gamma \leq 1$.

3. Αν η ανίσωση $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, τότε:

Α) $\lambda > 0$ Β) $\lambda < 0$

Γ) $\lambda = 1$ Δ) $\lambda = 0$.

4. Η εξίσωση $|x - 1| + |x - 5| = 4$ αληθεύει αν και μόνο αν:

Α) $x < 1$ Β) $x > 5$

Γ) $1 \leq x \leq 5$ Δ) $1 < x < 5$.

5. Η εξίσωση $|x - 1| = x - 1$:

Α) Είναι αδύνατη

Β) Έχει μοναδική λύση τη $x = 1$

Γ) Έχει άπειρες λύσεις

Δ) Είναι ταυτότητα.

ΙΙ. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	Η ανίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 > 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in R$.	Α	Ψ
2.	Η ανίσωση $\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 5 \leq 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in R$ είναι αδύνατη.	Α	Ψ

3.	**Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \geq 0$ και $x - 1 > 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.**	**Α**	**Ψ**
4.	**Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \leq 0$ και $x - 1 \leq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.**	**Α**	**Ψ**
5.	**Οι ανισώσεις και $\dfrac{2x - 1}{x + 1} > 1$ $2x - 1 > x + 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις.**	**Α**	**Ψ**
6.	**Οι ανισώσεις $\dfrac{x - 1}{(x - 2)^2} \geq 1$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.**	**Α**	**Ψ**
7.	**Οι ανισώσεις $\dfrac{x - 1}{(x - 2)^2} \geq 1$ και $(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.**	**Α**	**Ψ**

8.	Οι ανισώσεις $\frac{x - 2}{x - 1} \geq 0$ και $(x - 2)(x - 1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
9.	Οι ανισώσεις $\frac{x - 2}{x - 1} < 0$ και $(x - 2)(x - 1) < 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις	Α	Ψ
10.	Οι ανισώσεις $\frac{x + 1}{x - 1} < \frac{x + 2}{x + 1}$ και $(x + 1)^2 < (x - 1)(x + 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ

III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α' ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β' ομάδα.

Α' ΟΜΑΔΑ	
1	$-2x^2 + 6x - 4$
2	$x^2 - 3x + 2$
3	$-x^2 + 3x - 2$
4	$2x^2 - 6x + 4$

Β' ΟΜΑΔΑ	
Α	$(x-1)(x-2)$
Β	$-(x-1)(x-2)$
Γ	$2(x-1)(x-2)$
Δ	$-2(x-1)(x-2)$

IV. Να εντοπίσετε το <u>λάθος</u> στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η ανίσωση $(2x - 6)(x - 1) > 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$(2x - 6)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0$ και $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ και $x > 1 \Leftrightarrow x > 3$.

Όμως ο αριθμός 0, αν και είναι μικρότερος του 3, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

2. Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$ γράφεται ισοδύναμα:

$$x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Όμως ο αριθμός -1, αν και είναι μεταξύ του -2 και του 2, <u>δεν επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

3. Η ανίσωση $(x + 2)^2 (x - 1) \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:

$$(x + 2)^2(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Όμως ο αριθμός -2, αν και είναι μικρότερος του 1, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντι-στοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

1. Ο τόκος Τ σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με

ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\frac{ε}{100}$.

Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Τ. Για παράδειγμα, αν ε = 3 τότε Τ = 150 , ενώ αν ε = 5, τότε Τ = 250 κτλ.

2. Το διάστημα S σε km που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα 2h, με μέση ταχύτητα υ σε km/h, δίνεται από τον τύπο S = 2υ . Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν υ = 60, τότε S = 120 , ενώ αν υ = 70, τότε S = 140 , κτλ.

3. Το εμβαδό Ε ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = πρ^2$.

Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Ε. Για παράδειγμα αν ρ = 1, τότε Ε = π, ενώ αν ρ = 2, τότε Ε = 4π κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

- ✓ Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.
- ✓ Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς

στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται <u>συνάρτηση</u> από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού της f .

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.

Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το x$\in$ Α αντιστοιχίζεται στο y$\in$Β , τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το f(x) λέγεται τότε **τιμή της f στο x.** Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές f(x) για όλα τα x ∈ Α, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με f(Α) .
Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f : A \to B$$
$$x \to f(x)$$

Έτσι π.χ. η συνάρτηση f με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

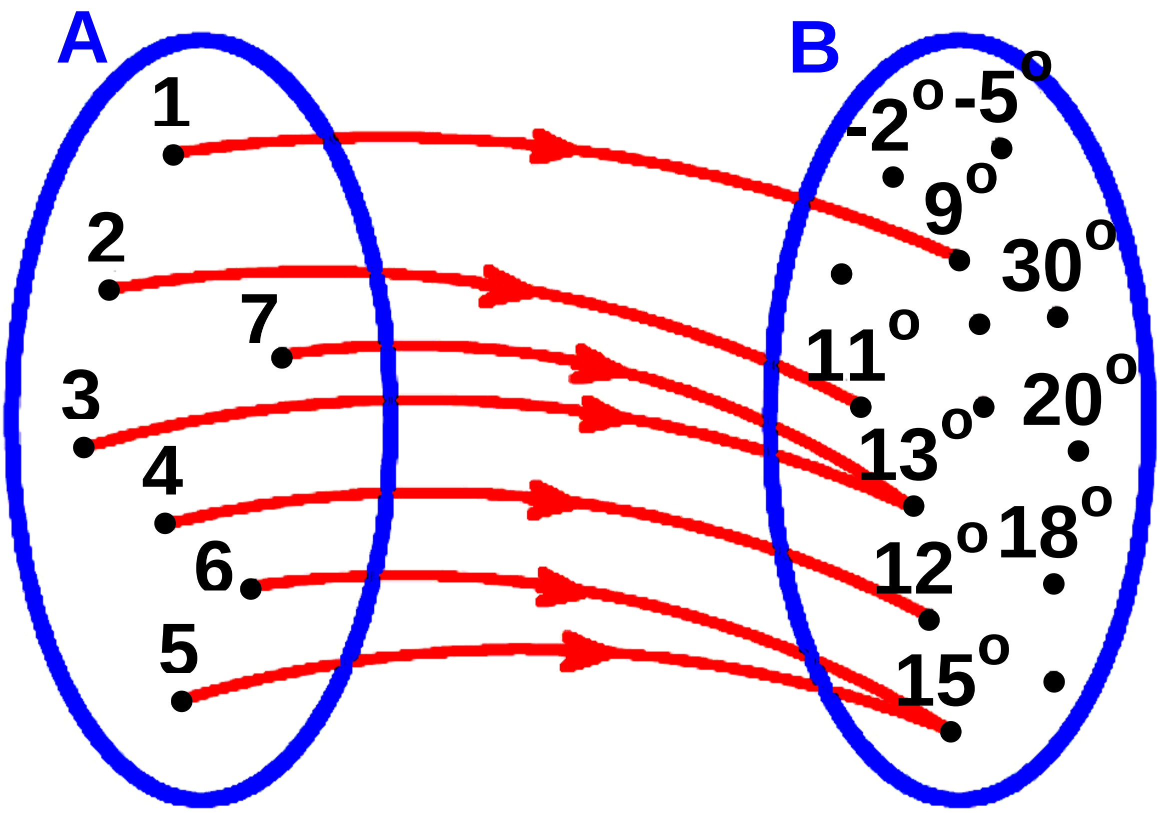
$f : [0, +\infty) \to R$

$x \to \sqrt{x}$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

1ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω *f* η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

f (A) = {9^0, 11^0, 12^0, 13^0, 15^0} $\subseteq$ B

Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης f : A $\to$ B .

• Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του B.

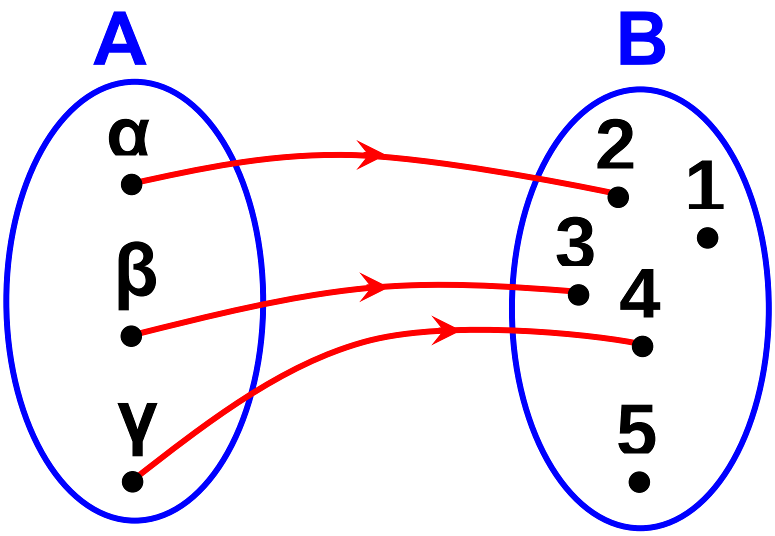
• Μερικά στοιχεία του B μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18^0).

• Δύο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του B (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο 13°).

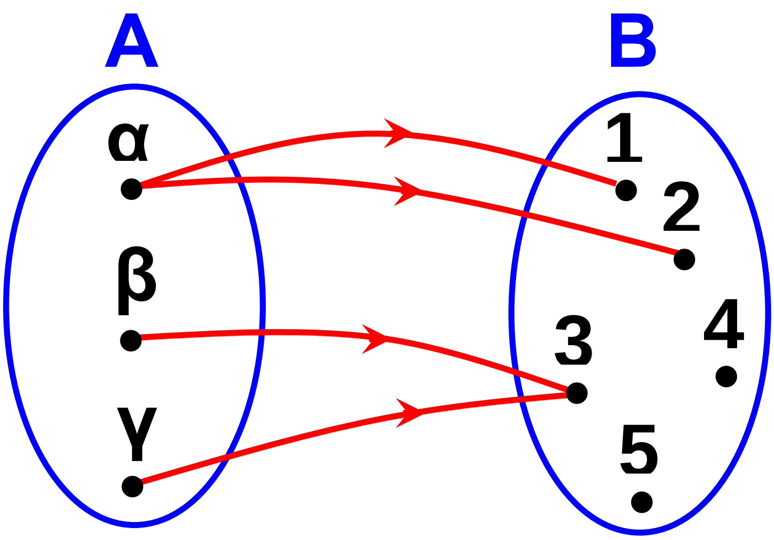
2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε τα σύνολα A = {α, β, γ} και B = {1, 2, 3, 4, 5}, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

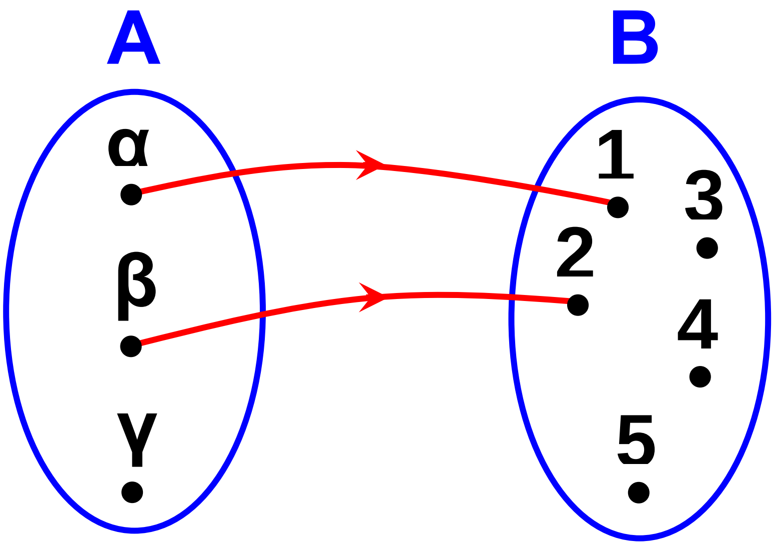
- ✓ Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.
- ✓ Το σχήμα (β) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το α $\in$ Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.
- ✓ Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το γ $\in$ Α δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β.
- ✓ Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση. Πρώτον διότι το γ $\in$ Α δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β και δεύτερον διότι το α $\in$ Α αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.



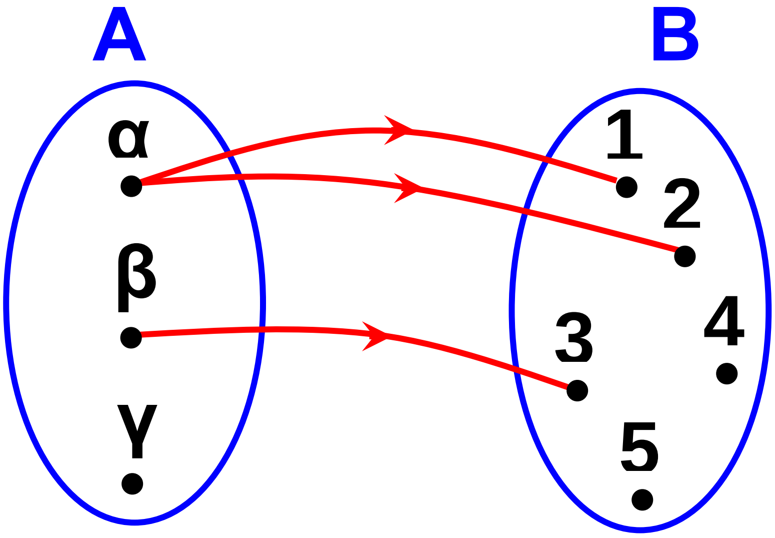
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση f, πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- **Το πεδίο ορισμού της Α**
- **Το σύνολο Β και**
- **Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$**

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f : A \to B$, όπου $A \subseteq R$ και $B \subseteq R$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση f δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το $f(x)$. Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση f, με $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y = \sqrt{1 - 4x}$ ».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε συμβατικά ότι:

- **Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του R στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.**
- **Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.**

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$A = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1 - 4x \geq 0$,

ενώ το σύνολο B είναι όλο το R .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ x - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1, 0 και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

✓ Για x = -1 < 0, από τον κλάδο $f(x) = x^2 + 1$, έχουμε:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

✓ Για x = 0, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:

$$f(0) = 0 - 1 = -1.$$

✓ Τέλος, για x = 1 ≥ 0, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:

$$f(1) = 1 - 1 = 0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και, γενικά, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για τα συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα χ για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι για παράδειγμα οι

$f(x) = x^2 - 4x + 7$, $g(t) = t^2 - 4t + 7$ και $h(s) = s^2 - 4s + 7$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$f(\ \ ) = (\ \ )^2 - 4(\ \ ) + 7$,

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Έτσι για να υπολογίσουμε το $f(-2)$ απλά τοποθετούμε το -2 στις

θέσεις, που ορίζουν οι παρενθέσεις:

$f(-2) = (-2)^2 - 4(-2) + 7 =$

$= 4 + 8 + 7 = 19$

Ομοίως, έχουμε

$f(3x) = (3x)^2 - 4(3x) + 7 = 9x^2 - 12x + 7$

Υπάρχει όμως και μια παραπέρα απλοποίηση των εκφράσεών μας που σχετίζονται με συναρτήσεις. Πολλές φορές αντί να λέμε «η συνάρτηση $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$», θα λέμε «η συνάρτηση $s = \frac{1}{2}gt^2$», δηλαδή γράφουμε s υπονοώντας το s(t). Αυτή η απλοποίηση γίνεται συχνότατα σε διάφορες επιστήμες, που χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία, όπως η φυσική, η χημεία κτλ. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές υπάρχει κάποιο πείραμα, όπου το t

είναι η τιμή ενός μεγέθους, που υπεισέρχεται στο πείραμα, και το s(t) η αντίστοιχη τιμή κάποιου άλλου μεγέθους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} + \sqrt{x - 1}$$

ΛΥΣΗ

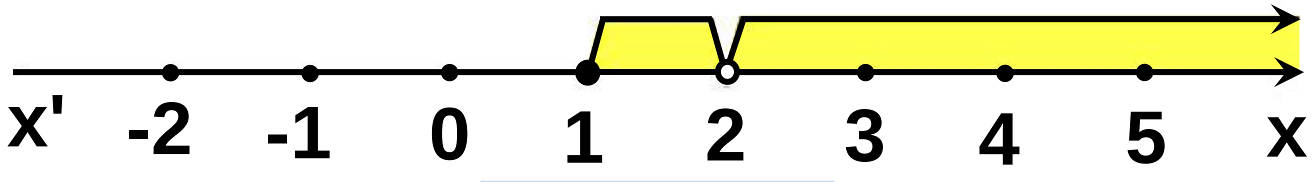
Η συνάρτηση *f* ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει

$$x - 2 \neq 0 \text{ και } x - 1 \geq 0$$

ή, ισοδύναμα, για

$$x \neq 2 \text{ και } x \geq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της *f* είναι το σύνολο A = [1,2) U (2, +∞) (Σχήμα)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \dfrac{4}{x - 1} + 5$ ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{|x| + x}$

2. Ομοίως των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}$

ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

iii) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

iv) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + 3, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-5)$, $f(0)$ και $f(6)$.

4. Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:
"Σκέψου έναν φυσικό αριθμό, πρόσθεσε σ' αυτόν το 1, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 4 και στο γινόμενο πρόσθεσε το τετράγωνο του αριθμού".
i) Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις τιμές της για $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ και $x = 3$.
Τι παρατηρείτε;
ii) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $f(x) = 36$, $f(x) = 49$, $f(x) = 100$ και $f(x) = 144$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i) $f(x) = \dfrac{4}{x - 1} + 5$,

ii) $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ και

iii) $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $f(x) = 7$

ii) $g(x) = 2$ και

iii) $h(x) = \dfrac{1}{5}$.

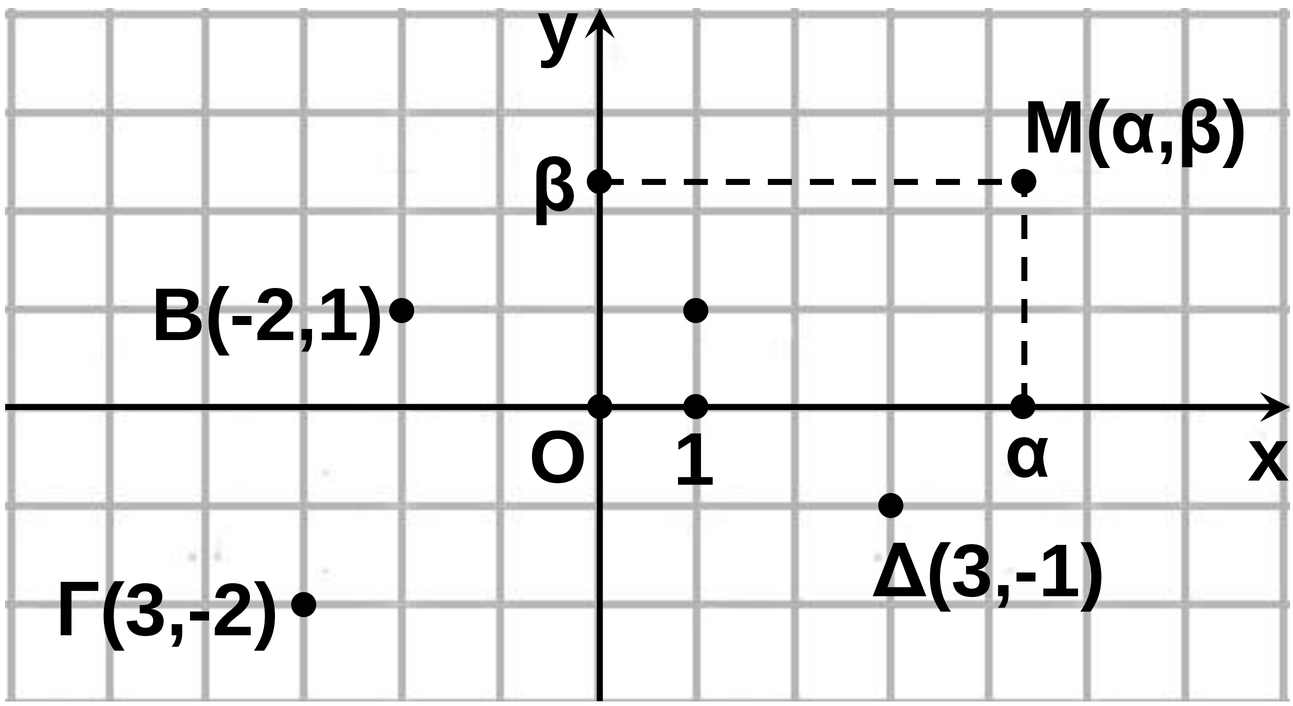
4.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x'x και y'y με κοινή αρχή ένα σημείο Ο. Από αυτούς ο οριζόντιος x'x λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή άξονας των x, ενώ ο κατακόρυφος y'y **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y**.

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο Μ του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:

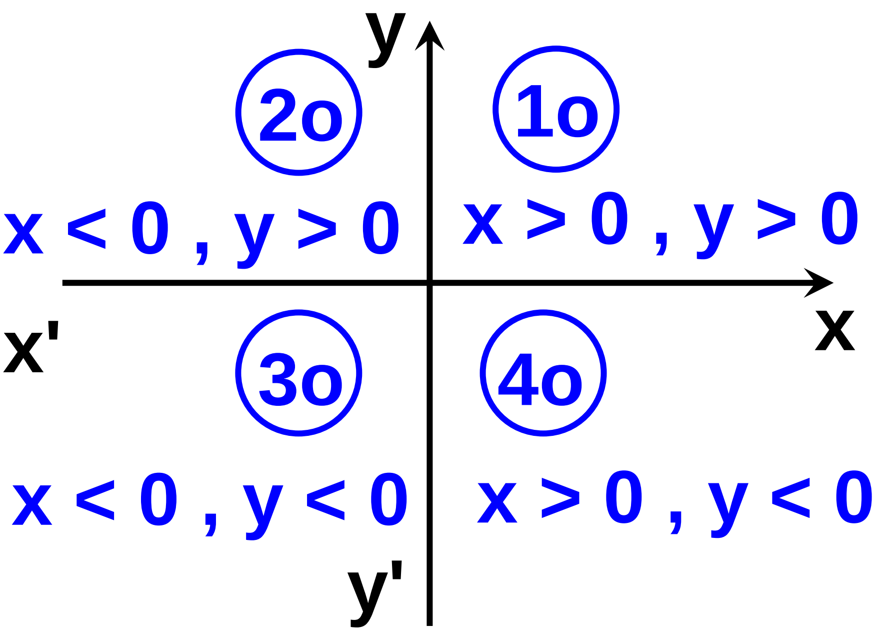


Οι αριθμοί **α, β** λέγονται **συντε-ταγμένες** του Μ. Ειδικότερα ο **α** λέγεται **τετμημένη** και ο β **τεταγμένη** του σημείου Μ. Το σημείο Μ που έχει συντεταγμένες **α** και **β** συμβολίζεται με **Μ(α, β)** ή, απλά, με **(α, β).**
Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε **καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** και το συμβολίζουμε Oxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε **καρτε-σιανό επίπεδο**. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται **ορθοκανονικό.**

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:
• Τα σημεία του άξονα x'x και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα y'y και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν
• Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}x'$, $x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζεται 1^o, 2^o, 3^o και 4^o, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των

συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



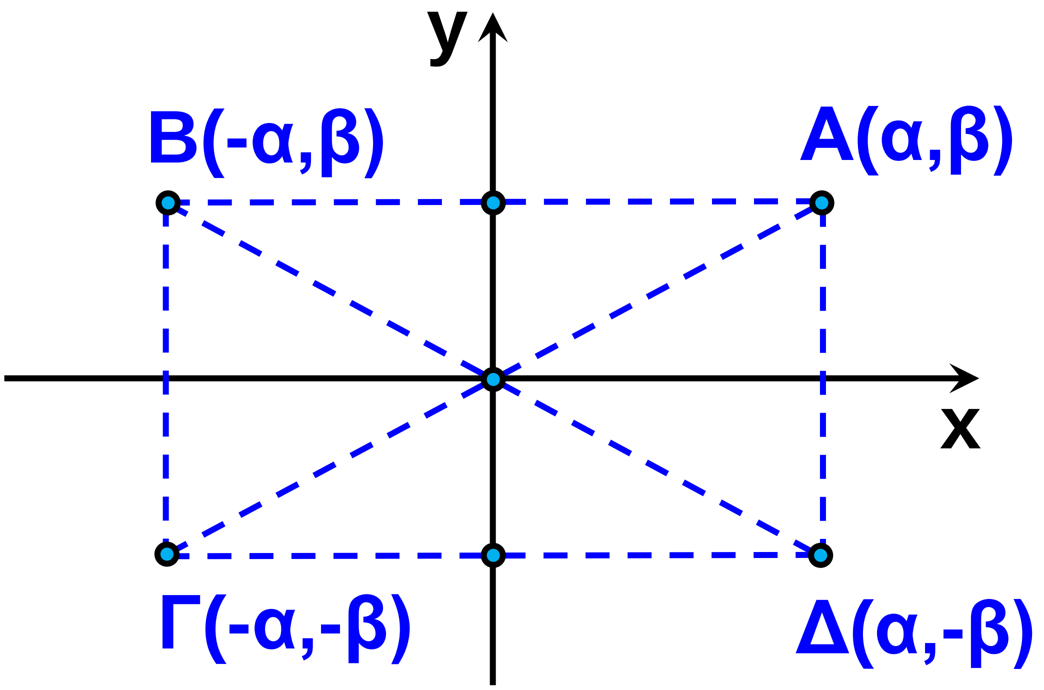
• Αν Α (α, β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:

✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x'x είναι το σημείο Δ (α,-β), που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη (Σχ. α').

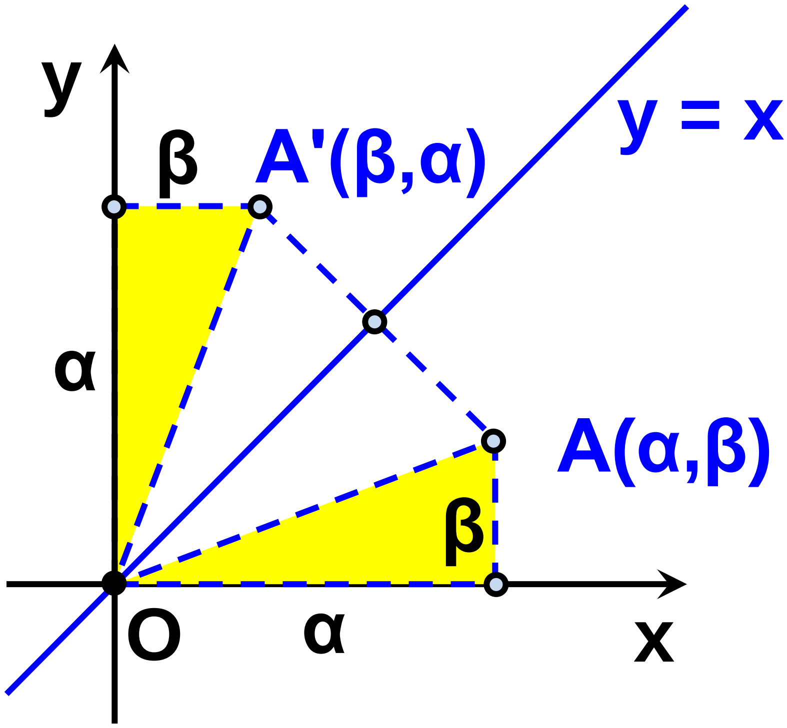
✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο Β(-α,β), που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη (Σχ. α').

✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Γ (-α,-β), που έχει αντίθετες συντεταγμένες (Σχ. α').

✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α'(β,α) που έχει τετμημένη την τεταγμένη του Α και τεταγμένη την τετμημένη του Α (Σχ. β').



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Απόσταση σημείων

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού. Θα δείξουμε ότι οι απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

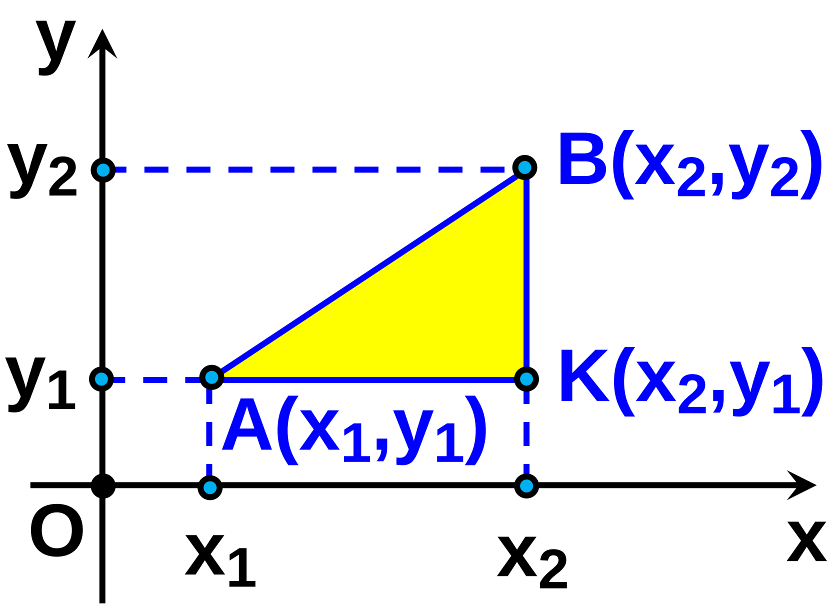
ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΒ του παρακάτω σχήματος έχουμε:

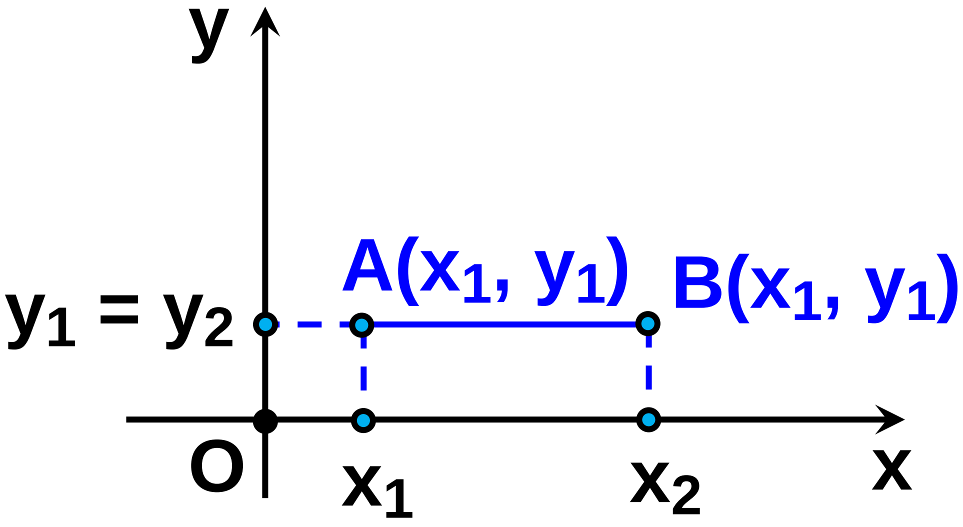
$$(AB)^2 = (KA)^2 + (KB)^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

οπότε:

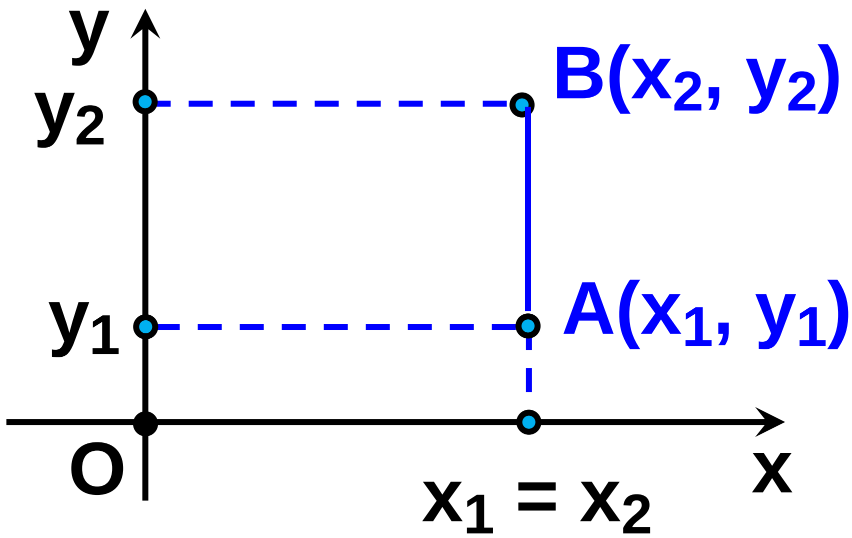
$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η ΑΒ είναι παράλληλη με τον άξονα x'x (Σχήμα γ') ή παράλληλη με τον άξονα y'y (Σχήμα δ').



Σχήμα γ'



Σχήμα δ'

Για παράδειγμα, αν Α(3,1), Β(3,5) και Γ (-1,1) είναι οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε θα είναι:

$$(AB) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 5)^2} =$$

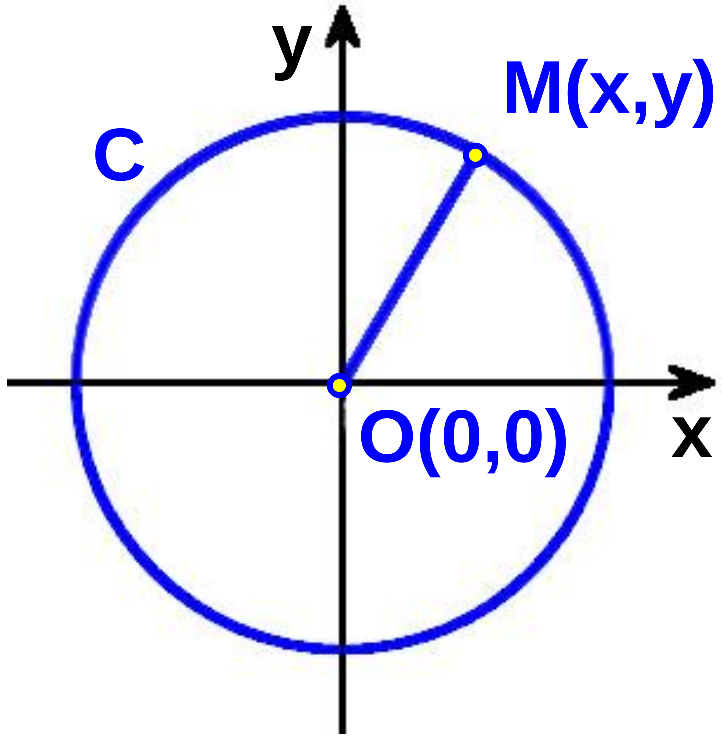
$$= \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Αφού, λοιπόν, είναι (ΑΒ) = (ΑΓ), το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και επειδή επιπλέον ισχύει $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 32 = (B\Gamma)^2$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ορθογώνιο .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ. Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο Μ (x, y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι προφανές ότι ένα σημείο M(x,y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει (ΟΜ) = ρ . Όμως

$(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε έχουμε:

$$(OM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$

Επομένως το σημείο M (x,y) ανήκει στο κύκλο C (O,ρ), αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1), που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων του κύκλου C (O, ρ) και μόνο από αυτές, λέγεται εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα ρ.

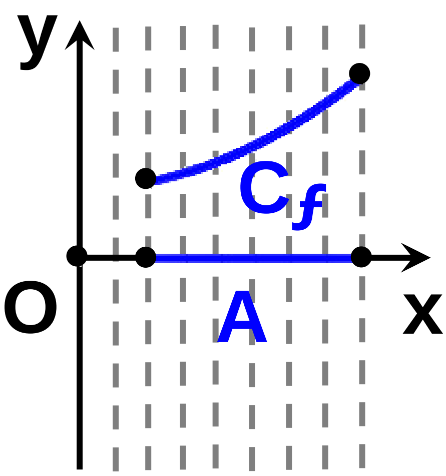
Για παράδειγμα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα ρ = 1 είναι η $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται και μοναδιαίος κύκλος.

Γραφική παρασταση συνάρτησης

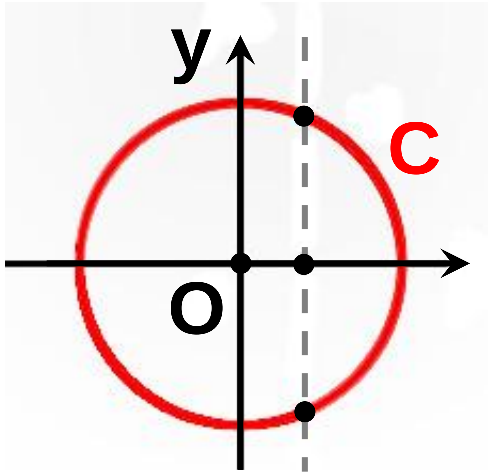
Έστω *f* μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων M (x, y) για τα οποία ισχύει y = *f*(x), δηλαδή το σύνολο των σημείων M (x, *f*(x)), $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της *f* και συμβολίζεται συνήθως με

C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f. Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y = f(x)$.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in R$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').

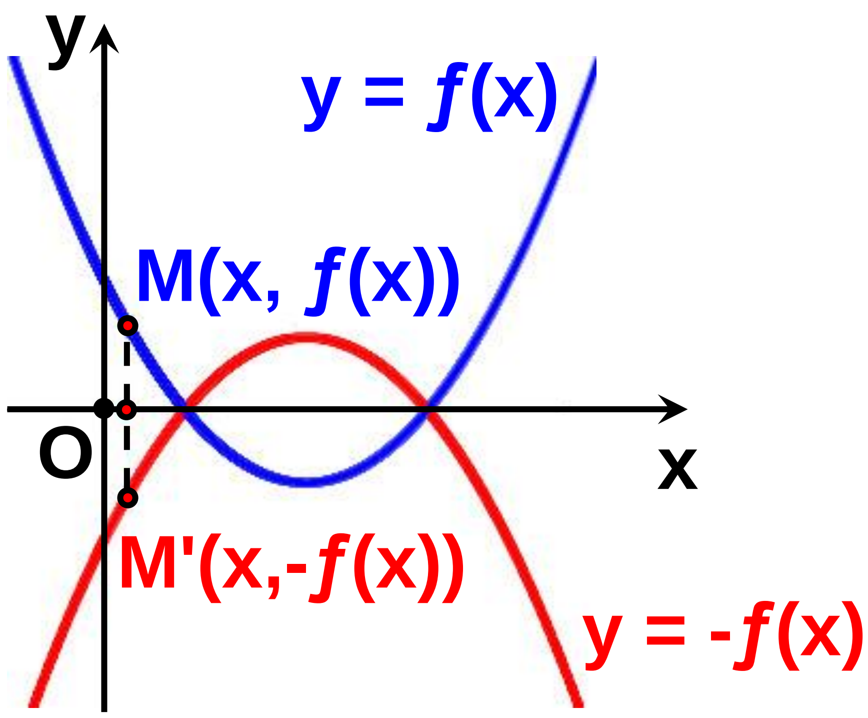


Σχήμα α'



Σχήμα β'

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης *f* μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης -*f*, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της *f* ως προς τον άξονα x'x και τούτο διότι η γραφική παράστασης της -*f* αποτελείται από τα σημεία Μ'(x,-*f*(x)) που είναι συμμετρικά των σημείων Μ(x, *f*(x)) της γραφικής παράστασης της *f* ως προς τον άξονα x'x .



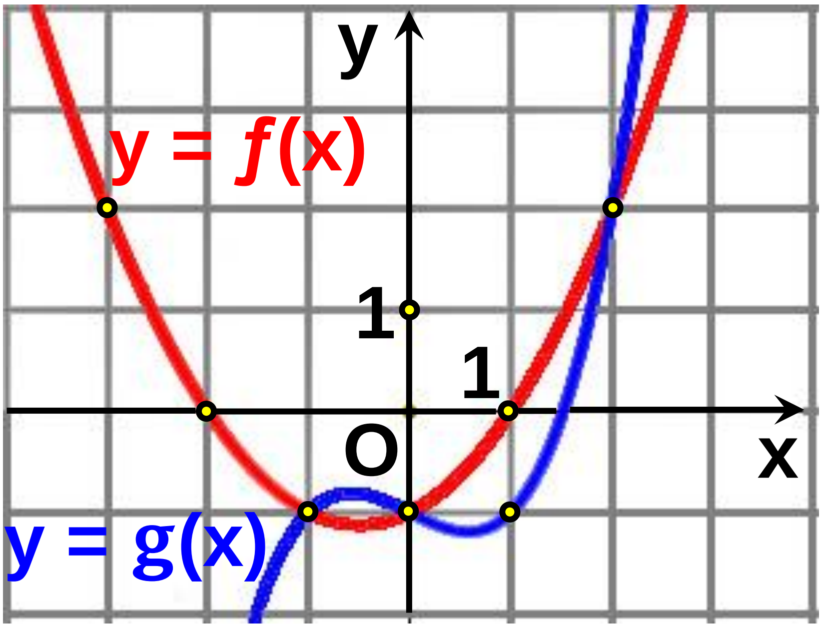
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g , που είναι ορισμένες σε όλο το R.

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία: 3, -2, -1, 0, 1 και 2

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:
$f(x) = 0$, $f(x) = 2$ & $f(x) = g(x)$.

iii)Να λύσετε τις ανισώσεις:
$f(x) > 0$ και $f(x) > g(x)$.



ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$f(-3) = 2$, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$,
$f(0) = -1$, $f(1) = 0$ και $f(2) = 2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα x'x, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που

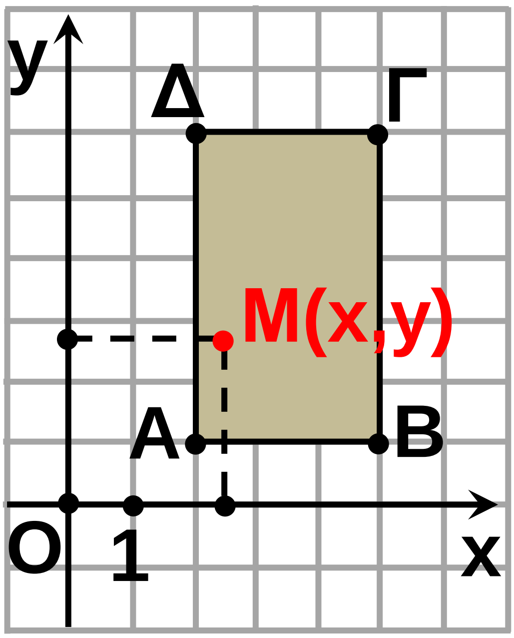
έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -3$ και $x_2 = 2$.
Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ και $x_3 = 2$.
iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x, δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.
Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -1) \cup (0,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία: Α(-1,2), Β(3,4), Ο(0,0), Γ(3,0), Δ(0,-5) και Ε(-2,-3).

2. Ένα σημείο Μ (x,y) κινείται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y ;



3. **Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α (-1,3),**
i) ως προς τον άξονα x' x
ii) ως προς τον άξονα y' y
iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$
iv) ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

4. **Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:**
i) Ο(0,0) και Α(4, -2),
ii) Α(-1,1) και Β(3,4),
iii) Α(-3,-1) και Β(1,-1);
iv) Α(1,-1) και Β(1,4).

5. **Να αποδείξετε ότι:**
i) Τα σημεία Α(1,2), Β(4,-2) και Γ(-3,5) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.
ii) Τα σημεία Α(1,-1), Β(-1,1) και Γ(4,2) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

6. **Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία:**
Α(2,5), Β(5,1) , Γ(2,-3) , Δ(-1,1) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

7. **Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.**

i) $f(x) = x^2 + k$, **Μ (2,6)**

ii) $g(x) = kx^3$, **Μ (-2,8)**

iii) $h(x) = k\sqrt{x+1}$, **Μ(3,8).**

8. **Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.**

i) $f(x) = x - 4$

ii) $g(x) = (x - 2)(x - 3)$

iii) $h(x) = (x - 1)^2$

iv) $q(x) = x^2 + x + 1$

v) $\varphi(x) = x\sqrt{x - 1}$

vi) $\psi(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$.

9. **Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$.**
Να βρείτε:

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x .

10. **Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$.**
Να βρείτε:

i) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 2ου ΤΟΜΟΥ